

جمع اعداد متوالی

سلام حال شما چطوره، خوبید؟

یک داستان هست در مورد دانش آموزی به نام کارل گوس که یک روز توی کلاس نشسته بود و معلم آنها برای این که به کار خودش مشغول شه و بچه ها هم سرگرم باشند (مزاحم استراحتش نشوند) از اونها خواست مجموع اعداد یک تا صد را محاسبه کنند. قبل از این که معلم بتواند همه وسایل و دفتر و کتاب خود را کامل جمع و جور کنه و کار خودش رو شروع کنه (همون استراحتش رو)، کارل دست خود را بالا گرفت، دبیر با تصور این که او می خواد (همون می خواهد خودمون) سوال بپرسه و این شروع رگبار سوالی دانش آموزان بشه، گفت: سوال نداریم، محاسبه کنید، سوالم کاملاً مشخصه.

کارل در جواب داد: آقا سوال ندارم.

معلم: تازه اومدی سر کلاس می خوای بری بیرون؟

کارل: نه آقا

معلم: پس چته؟

کارل: آقا جواب رو می خوام بگم.

معلم پوزخندی زد و گفت: برووووووووووووووو!!!!!!

و بعد با حالت تمسخر آمیزی گفت: هیچی دیگه دانشمند کم داشتیم که خدا رو شکر پیدا کردیم!

کارل کمی خجالت کشید ولی هیجان کشف جواب آنقدر او را به ذوق آورده بود که این خجالت او را از پاسخ دادن منصرف نمی کرد، هیجان آنقدر در چهره اش مشخص بود که کسی نمی توانست این شور و هیجان را نادیده بگیره، معلم با حالتی که به نظر می رسید فقط می خواهد پسرک را ساکت کند و آماده است که بعد از جواب او متلکی گل درشت به او بندازد گفت: خب بگو، آقای پروفیسور.

یک دستش را به کمر زده بود و روی یک پا تکیه داده بود و چون احساس می کرد دارد زمانش را تلف می کند، بی حوصله و با حرصی به چشمان کارل زل زده بود و منتظر جواب غلط کارل شد. کارل بی توجه به این حالت معلم گفت: پنج هزار و پنجاه، معلم ابتدا بدون این که حرکت کند کمی اخم هایش را در هم برد و حالت متفکر به خود گرفت، بچه ها حس کردند که جواب غلط نیست، معلم در ذهنش داشت فکر می کرد چطور ممکنه، شاید ماشین حساب داره؟ اما نه با این سرعت حتی نمی تونه اعداد را تو ماشین حساب وارد کنه، حتماً جواب را از قبل می دونسته، باید مچش رو بگیرم.

اینجا معلم با لحنی پوکر فیس به کارل گفت: بیا حلش کن ببینم. کارل پای تخته رفت و در ابتدا این را نوشت

$$1+2+3+4+5+\dots+98+99+100$$

و گفت: ما می خواهیم حاصل جمع این عبارت را به دست بیاوریم درست است؟ و بدون این که منتظر جواب شود ادامه داد خب اول می شماریم چند تا عدد داریم و پای تخته نوشت.

$$\overbrace{1+2+3+4+5+\dots+98+99+100}^{100 \text{ تا عدد د}}$$

کارل: همان طور که می بینید صد تا عدد داریم. مکشی کرد و ادامه داد من صد تا عدد دیگر می نویسم.

$$\overbrace{1+2+3+4+5+\dots+98+99+100}^{100 \text{ تا عدد د}}$$

$$\underbrace{100+99+98+97+96+\dots+3+2+1}_{\text{صد عدد ب گ ر}}$$

کارل: می بینید صد عدد دوم همان اعداد اولیه هستند که از آخر به اول نوشته شده اند. دوباره مکشی کرد کمی بیش تر از دفعه قبل: خب اگر من همه ی این اعداد را با هم جمع بزنم انگار دوبار اعداد یک تا صد را جمع کرده ام درسته؟

نگاهی به بچه ها کرد و منتظر تأیید آنها ماند، سه چهار نفر با سر حرف او را تأیید کردند اما او انگار به این تعداد راضی نبود. دوباره گفت: بچه ها ببینید اینجا دو سری اعداد یک تا نوشته شده

$$\overbrace{1+2+3+4+5+\dots+98+99+100}^{100 \text{ تا عدد د}}$$

$$\underbrace{100+99+98+97+96+\dots+3+2+1}_{\text{صد عدد ب گ ر}}$$

اگر اینها را با هم جمع کنیم دو سری عدد یک تا صد را جمع کردیم و دو برابر جوابی را که می خواهیم (یعنی یک سری مجموع اعداد یک تا صد) به دست آوردیم. بعد با لحنی جدی، سوالی و محکم پرسید: درسته؟

این بار حدود نصف کلاس حرف او را با اشاره سر تأیید کردند و یکی دو نفر هم با لحنی بانمک اما همراه گفتند: درسته.

رضایت نسبی در صورت کارل دیده می شد، او از این که بچه ها تا اینجای کار را فهمیده بودند کاملاً راضی بود. بعد ادامه داد: بچه ها اگر من اعداد را دوتا دوتا جمع کنم، بعد حاصل جمع ها را با هم جمع کنم، در جواب آخر فرقی می کند؟

نگاه بچه ها به او می گفت مثل این که این دفعه بیشترشان نفهمیدند. کارل نفس عمیقی کشید و در حد سه ثانیه سکوت کرد و معلوم بود در حال فکر کردن است، بعد گفت: منظورم رو با یه مثال میگم، فرض کنید می خواهیم ۶ عدد زیر را جمع کنیم:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

می توانم تک تک آنها را با هم جمع کنم.

$$1+2+3+4+5+6=3+3+4+5+6$$

اول یک را با دو عدد جمع کنم.

$$3+3+4+5+6=6+4+5+6$$

بعد ۳ را ۳ عدد جمع کنم.

$$6+4+5+6=10+5+6$$

بعد ۶ را با ۴ جمع کنم.

$$10+5+6=15+6$$

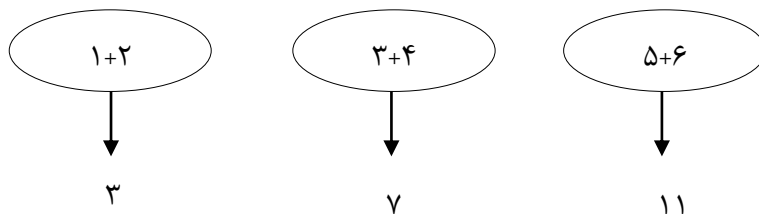
بعد ۱۰ را با ۵ جمع کنم.

$$15+6=21$$

و در آخر ۱۵ را با ۶ جمع کنم.

همان طور که می بینید حاصل برابر ۲۱ می شود.

یک راه دیگر هم دارد. می توانم اعداد را دو به دو با هم جمع کنم، یعنی مثلاً ۱ را با ۲، ۳ را با ۴ و ۵ را با ۶ جمع کنم.



حالا این سه عدد را با هم جمع کنم.

$$3 + 7 + 11 = 10 + 11 = 21$$

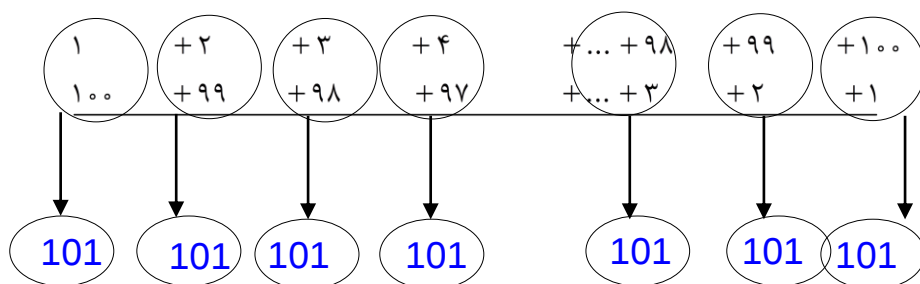
پس ایرادی ندارد در جمع اعداد را دو به دو با هم جمع کنیم بعد حاصل ها را با هم جمع کنیم درسته؟

بچه ها به نشانه تأیید و قیافه ای که می شد فهمید مطلب برایشان غیرعادی بوده سر خود را تکان دادند، انگار می خواستند بگویند خب که چه؟

کارل ادامه داد پس من می توانم در این جمع اعداد را دو به دو با هم جمع کنم و این حاصل جمع را با هم جمع کنم تا جواب به دست آید.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ + 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 3 + 2 + 1$$

برای انتخاب های جفت این گونه عمل می کنیم اولین عدد ردیف اول را با اولین عدد ردیف دوم جمع می کنیم دومین عدد هر ردیف را با هم و سومین عددها را با هم تا انتها همین کار را ادامه می دهیم.



کارل: همان طور که مشاهده می کنید حاصل همه ی این جمع ها عدد (۱۰۱) است. می دانیم که تعداد این ۱۰۱ ها صدتاست چون هر ردیف صد عدد قرار دارد.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 \quad 101 \quad 101 \quad 101 \quad 101 \quad \dots \quad 101 \quad 101 \quad 101 \end{array}$$

صدت ۱۰۱ اعداد

پس اگر بخواهیم آنها را جمع کنیم به این صورت می شود.

$$۱۰۱ \times ۱۰۰ = \text{حاصل جمع } ۱۰۰ \text{ تا عدد } ۱۰۱$$

که حاصل آن ۱۰۱۰۰ است این عدد یعنی ۱۰۱۰۰ حاصل جمع دو سری اعداد ۱ تا ۱۰۰ است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{سری اول} \rightarrow ۱+۲+۳+۴+...+۹۷+۹۸+۹۹+۱۰۰ \\ \text{سری دوم} \rightarrow ۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+...+۴+۳+۲+۱ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حاصل جمع کل} = ۱۰۱۰۰$$

ما در مسئله فقط حاصل یک سری را می خواستیم، یعنی نصف این عدد

$$\frac{۱۰۱۰۰}{۲} = ۵۰۵۰$$

پس حاصل جمع می شود ۵۰۵۰

معلم لختی به تابلو نگاه کرد، نیشخند کنایه آمیز روی لبانش کاملاً از بین رفته بود و به جای آن حالت نیمه باز به خود گرفته بود، از چشم هایش تعجب همراه با گیجی می بارید، انگار که استدلال را فهمیده و می داند مرحله به مرحله آن درست بوده ولی هنوز جواب را هضم نکرده بود. بچه های کلاس هم دست کمی از معلم نداشتند.

خب حالا شما با توجه به این استدلال، حاصل جمع های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{c} ۵+۶+۷+۸+...+۹۶+۹۷+۹۸+۹۹= \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 99+98+97+96...+8+7+6+5 \end{array}$$

$$99-5=94$$

$$94+1=95$$

$$104 \times 95 = 9880 \quad \frac{9880}{2} = 4940$$

$$\begin{array}{c} ۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+...+۹۶+۹۷+۹۸+۹۹= \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 99+98+97+96...+18+17+16+15 \end{array}$$

$$114 \times 85 = 9690$$

$$\frac{9690}{2} = 4845$$

$$99-15=84$$

$$84+1=85$$

$$۳۰+۳۴+۳۸+۴۲+...+۷۰=$$

$$30+70 = 100$$

$$100 \times 11 = 1100$$

$$\frac{1100}{2} = 550$$

$$\frac{70-30}{4} + 1 = 11$$